Sommario delle lezioni di Analisi Matematica
a.a. 2010-2011 cdl EDL (Ingegneria edile) (A - L) prof. C. Franchetti

Paragrafi stampati in piccolo come questo sono da considerarsi complementari e non indispensabili

Parte Prima

1 Argomenti preliminari

1.1 Equazioni di secondo grado

La più generale equazione di secondo grado si può scrivere così

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$$

Dividendo per a si ottiene un'equazione equivalente che scriveremo

$$x^2 + px + q = 0$$

per risolverla si usa il cosidetto "completamento del quadrato"

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + q - p^2/4 \text{ e quindi } (x + p/2)^2 = p^2/4 - q = \Delta$$

Poiché un quadrato non può essere negativo, se $\Delta < 0$ non ci sono soluzioni. Se $\Delta \geq 0$ si ha $x = -p/2 \pm \sqrt{\Delta}$. Se $\Delta = 0$ si ha un'unica soluzione, se $\Delta > 0$ si hanno due soluzioni distinte.

1.2 Potenze

Sia $a \neq 0$ e n sia un intero positivo maggiore di 1, posto $a^n = a.a...a$ (n fattori uguali ad a); valgono le proprietà

$$a^m a^n = a^{m+n} \text{ dove } m, n > 1 \text{ ; } a^m/a^n = a^{m-n} \text{ se } (m-n) > 1.$$

Volendo estendere la definizione di potenza agli esponenti 1 e 0 in modo che le proprietà restino valide si pone $a^1 = a$, $a^0 = 1$. Analogamente si ottiene una definizione coerente per ogni esponente intero relativo (in Z) ponendo, per $p > 0, a^{-p} = 1/a^p$. Supponiamo ora che sia $a > 0$, si definisce la potenza a esponente razionale a^x ($x \in Q$) nel seguente modo: se $x = m/n$ (dove m, n sono interi) allora $a^x = \sqrt[n]{a^m}$. Si verifica che le due proprietà soprascritte continuano a valere per esponenti in Q.

1.3 Regola di Ruffini

Dicesi polinomio ogni espressione del tipo $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n$, il numero c_i viene detto coefficiente del termine con x a esponente i. Si chiama grado del polinomio il massimo esponente fra i termini con coefficiente non nullo. Se $c_n \neq 0$ il polinomio scritto sopra $P(x)$ ha grado (esattamente) n, altrimenti il suo grado sarà strettamente minore di n.

Definizione. Un polinomio $A(x)$ si dice divisibile per un polinomio $B(x)$ se esiste un polinomio $Q(x)$ tale che $A(x) = B(x)Q(x)$.

Siccome il grado del prodotto di due polinomi è uguale alla somma dei gradi dei polinomi fattori, segue che una condizione necessaria per la divisibilità è che il grado di $B(x)$ sia minore o uguale del grado di $A(x)$. Vale il seguente risultato (divisione con resto): dati due polinomi $A(x), B(x)$ con grado di $B(x)$ minore o uguale del grado di $A(x)$, esiste una e una sola coppia di polinomi $Q(x), R(x)$ con grado di $R(x)$ strettamente minore del grado di $B(x)$ tale che $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$. Segue da qui

Teorema (regola di Ruffini). Un polinomio $A(x)$ di grado maggiore o uguale a 1 è divisibile per un binomio del tipo $(x - a)$ se e solo se a è radice del polinomio $A(x)$.

Dimostrazione. Si ha $A(x) = (x-a)Q(x)+R(x)$, con grado di $R(x)$ minore di grado di $(x - a)$ che è uguale a 1, cioè grado di $R(x) = 0$, ossia $R(x)$ è una costante R. Pertanto $A(x) = (x - a)Q(x) + R$; facendo $x = a$ si ottiene $R = A(a)$ per cui $A(x) = (x - a)Q(x) + A(a)$. Dunque la divisibilità si ha se e solo se a è una radice di $A(x)$, cioè $A(a) = 0$.

1.4 Misura in radianti degli angoli

Se C è una circonferenza di raggio $r > 0$, allora la lunghezza di C è $2\pi r$, dove $\pi = 3,1415...$ Misureremo gli angoli così: il vertice di un angolo qualsiasi sia centro di una circonferenza C di raggio 1, la misura (in radianti) di questo angolo è, per definizione, uguale alla lunghezza dell'arco intercettato dall'angolo su C. Si vede subito che la misura (in radianti) degli angoli di 0, 90, 180, 360 gradi vale risp. $0, \pi/2, \pi, 2\pi$. La misura di un angolo in radianti è sempre un numero reale. Gli angoli saranno sempre misurati in radianti.

1.5 Insiemi

Il concetto di "insieme" si considera primitivo. Denotiamo di solito insiemi generici con le maiuscole: A, B etc.; gli oggetti (elementi) di un insieme con minuscole a, b etc. Si usa il simbolo $\in$ per l'**appartenenza**, quindi $b \in B$ significa che l'oggetto b appartiene all'insieme B. A volte, se è possibile, si denota un insieme elencandone i suoi elementi, per es. se $D = \{1, 5, 12\}, D$ contiene esattamente i tre elementi elencati. Si dice che un insieme A è finito se contiene un numero finito n di elementi e si dice che n è la sua **cardinalità**. Si considera anche l'insieme privo di elementi, detto **insieme vuoto** che viene indicato con $\emptyset$. Si dice che B è un **sottoinsieme** di A (e si scrive $B \subset A$) se ogni elemento di B è anche un elemento di A. Notare che $B \subset A$ e $A \subset B$ implica $A = B$. Dati due insiemi A, B si definiscono rispettivamente le operazioni di **unione** e **intersezione** che portano a nuovi insiemi: $x \in A \cup B$ se x appartiene ad A **o** a B, $x \in A \cap B$ se x appartiene ad A **e** a B. Vale sempre $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ e $A \cap B \subset B \subset A \cup B$. Se $A \cap B = \emptyset$ si dice che A e B sono **disgiunti**. La **differenza** tra l'insieme A e l'insieme B, denotata con $A \setminus B$, è definita da $A \setminus B = \{a \in A : a \notin B\}$, si noti che in generale $A \setminus B \neq B \setminus A$. Spesso tutti gli insiemi che si considerano sono sottoinsiemi di un insieme "universo" . Dato un insieme A in un universo X, il **complementare** di A (rispetto a X) denotato con A^c è l'insieme degli elementi (appartenenti a X) che non stanno in A. Siano A, B insiemi, il **prodotto cartesiano** di A per B, denotato $A \times B$, è l'insieme i cui elementi sono tutte le **coppie ordinate** (a, b) con primo elemento in A e secondo elemento in B. Osserviamo che se A ha cardinalità m e B ha cardinalità n, allora $A \times B$ ha cardinalità mn. Tratteremo spesso gli insiemi numerici $N \subset Z \subset Q \subset R$(numeri reali) $\subset C$ (numeri complessi).

Dato un insieme qualsiasi A, una **relazione** in A è una legge denotata con $\sim$ che seleziona alcune coppie di $A \times A$: se la relazione $\sim$ seleziona la coppia (a, b) scriveremo $a \sim b$.

La relazione $\sim$ si dice di **equivalenza** se gode delle tre proprietà seguenti: **riflessiva**: $a \sim a$ per ogni $a \in A$, **simmetrica**: $a \sim b$ implica $b \sim a \, (a, b \in A)$, **transitiva**: $a \sim b$ e $b \sim c$ implica $a \sim c \, (a, b, c \in A)$.

Discutiamo ora l'importante concetto di **insieme quoziente**. Supponiamo che un'urna contenga 50 palline: 10 bianche, 10 nere, 15 rosse e 15 verdi; a questo ente concreto posso associare un insieme astratto A che contiene (per definizione) 50 elementi (le palline); posso però considerare le palline dello stesso colore come un'unica sottofamiglia della famiglia di

tutte le palline, questo punto di vista equivale a considerare un altro insieme astratto A^* (che chiameremo insieme quoziente) che possiede esattamente 4 elementi; potrei scrivere $A^* = \{b, n, r, v\}$. E' importante ricordarsi sempre che gli insiemi A e A^* sono (logicamente) distinti. Faremo ora seguire le definizioni formali.
Sia $a \in A$, l'insieme degli elementi di A equivalenti ad a nella relazione di equivalenza $\sim$ si chiama **classe di equivalenza** determinata da a, questa è il sottoinsieme di A descritto da $\{b \in A : b \sim a\}$. Si verifica facilmente che due classi di equivalenza o coincidono o sono disgiunte.
Definizione. Si chiama **insieme quoziente** (di A rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$) l'insieme $A^\sim$ i cui elementi sono le classi di equivalenza determinate in A dalla relazione di equivalenza $\sim$.
Nell'esempio dell'urna la relazione di equivalenza $\sim$ è "dello stesso colore", cioè $a \sim b$ se e solo se a è dello stesso colore di b. Dato un insieme A, una famiglia di sottoinsiemi $\{A_i\}$ di A è una **partizione** di A se $\cup_i A_i = A$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$. Ogni partizione di A definisce in modo naturale una relazione di equivalenza $\sim$ su A per cui i sottoinsiemi A_i sono le sue classi di equivalenza: basta porre $a \sim b$ se e solo se a e b appartengono a uno stesso sottoinsieme A_i della partizione.

1.6 Operazioni negli insiemi numerici N e Z

Conosciamo l'addizione (o somma) in N: se $a \in N$, $b \in N$ sappiamo in qualche modo calcolare $(a + b)$ che sarà ancora un numero di N. L'addizione gode delle due proprietà:
$a + b = b + a$ **commutativa**, $(a + b) + c = a + (b + c)$ **associativa**.
Si noti che la proprietà associativa consente di definire la somma di un numero qualsiasi di addendi. Se, come spesso si fa, si considera anche lo 0 come appartenente a N, conviene rilevare l'esistenza in N di un elemento neutro, cioè lo zero, rispetto alla somma; si ha infatti per ogni $a \in N$ che $a + 0 = 0 + a = a$. Siano $a, b \in N$, consideriamo l'equazione $a + x = b$: risolvere (in N) l'equazione significa determinare il sottoinsieme (eventualmente vuoto) di N dei numeri di N che sostituiti alla x nell'equazione rendono vera l'uguaglianza. La x chiamasi incognita dell'equazione. Per esempio l'equazione $3 + x = 5$ ha l'unica soluzione $x = 2$; l'equazione $5 + x = 3$ non ha soluzioni (in N). In N si può definire in qualche caso l'operazione inversa della somma ossia la sottrazione: dati a, b in N, $(b - a)$, se esiste, è quel numero che sommato ad a mi dà b, ovvero la soluzione dell'equazione $a + x = b$. Se ampliamo l'insieme N ottenendo l'insieme Z degli interi relativi non oc-

corre più considerare la sottrazione e inoltre l'equazione (in Z) $a + x = b$ ha sempre una e una sola soluzione: $x = (b - a)$. Come si dice rispetto all'operazione di somma Z è un **gruppo commutativo**, valgono cioè le proprietà: ogni $a \in Z$ ammette (in Z) un unico inverso, denotato con $-a$, che soddisfa $a+(-a) = (-a)+a = 0$, esiste l'elemento neutro rispetto alla somma (lo zero) inoltre la somma è commutativa. In Z è definita anche una seconda operazione, la moltiplicazione (o prodotto): se $a, b \in Z$ sappiamo in qualche modo calcolare ab che sarà ancora un numero di Z. La moltiplicazione gode delle due proprietà: $ab = ba$ commutativa, $(ab)c = a(bc)$ associativa. Si noti che la proprietà associativa consente di definire il prodotto di un numero qualsiasi di fattori. Esiste poi l'elemento neutro rispetto al prodotto che è il numero 1. Le due operazioni sono legate dalla proprietà **distributiva**: $a(b + c) = ab + ac$. Si dimostrano inoltre facilmente: regola dei segni (+ per + = - per - = + ; + per - = - per + = -) e la legge di annullamento di un prodotto ($ab = 0$ se e solo se uno almeno fra a e b è uguale a 0).

1.7 Funzioni

Da un punto di vista (molto) astratto una funzione è una tripletta (f, A, B) che però denoteremo nella forma $f : A \to B$ dove A, B sono due insiemi qualsiasi e f è una "legge di natura qualsiasi" che ad ogni elemento a di A associa uno e un solo elemento, denotato $f(a)$, appartenente a B, A si chiama **dominio** di f e B si chiama **codominio** di f. Si chiama **immagine** di f l'insieme $f(A) = \{f(a), a \in A\}$, cioè l'immagine di f è l'insieme di tutti i valori che prende su A la funzione f, si noti che $f(A) \subset B$ ma non è richiesto che $f(A)$ "riempia" B; se $f(A) = B$ si dice che la funzione f è **suriettiva**. Si può vedere f come una "legge deterministica". A volte due funzioni si possono "comporre" in modo da definire una terza funzione (la composizione). Date due funzioni $f : A \to B$ e $g : C \to D$ se $B \subset C$ è possibile definire la **funzione composta** $g \circ f : A \to D$ mediante la formula $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$. Una funzione $f : A \to B$ si dice **iniettiva** se $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ o equivalentemente se $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$. Se f è iniettiva allora per ogni $b \in B$ esiste al più un elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$, se poi $b \in f(A)$ esiste esattamente un $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Se f è iniettiva si può definire la sua **funzione inversa** cioè la funzione $f^{-1} : f(A) \to A$ mediante la formula $f^{-1}(y) = x$ dove x è l'unico elemento di A tale che $f(x) = y$. Una funzione$f : A \to B$ che sia contemporaneamente

iniettiva e suriettiva si dice **biiettiva**. Si dice che due insiemi A, B sono in corrispondenza biunivoca se esiste una biiezione tra essi, in tal caso A e B hanno la stessa cardinalità.
Data una funzione $f : A \to B$, il suo **grafico** è il sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ così definito: $\mathrm{Gr}(f) = \{(a, f(a)) : a \in A\}$.
Se B è uguale a R o a un suo sottoinsieme si dice che f è una **funzione reale**.
Consideriamo funzioni reali definite in uno stesso insieme A, la somma e il prodotto di due tali funzioni f, g sono definiti in modo naturale dalle formule $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$; il quoziente f/g risulterà definito nel sottoinsieme $A_0 = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$ di A dalla formula $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$. Se A è un sottoinsieme di R si parlerà di **funzioni reali di variabile reale**.

1.8 Relazione d'ordine

Una **relazione d'ordine** in un insieme A è una relazione $\sim$ che soddisfa le tre proprietà:
riflessiva $a \sim a$, **antisimmetrica** $a \sim b$ e $b \sim a$ implica $a = b$, **transitiva** $a \sim b$ e $b \sim c$ implica $a \sim c$;
un insieme A in cui sia definita una relazione d'ordine si dice **parzialmente ordinato**, se poi per ogni coppia (a, b) vale o $a \sim b$ o $b \sim a$ si dice che A è **totalmente ordinato**.

1.9 Uso degli indici

Una lettera a può rappresentare un numero qualsiasi; avendo più numeri da rappresentare si potrebbero usare più lettere a, b, c, ...; dovendo per es. indicare un gruppo di 50 numeri si dovrebbe usare un (lungo) elenco $a, b, ..$ (di 50 lettere) ma è più conveniente usare la notazione $\{a_i\}_{i=1}^{50}$ che è la scrittura abbreviata per $\{a_1, a_2, ..., a_{50}\}$. Per esempio $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$ lo possiamo scrivere $\{2k - 1\}_{k=1}^{9}$. L'insieme N dei numeri naturali può essere denotato $\{n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, .., n, ...\}$ e il suo sottoinsieme dei numeri pari $\{2n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 4, .., 2n, ...\}$, l'insieme dei reciproci dei numeri naturali $\{1/k\}_{k \in N} = \{1/1, 1/2, .., 1/n, ...\}$. Se poi si dovessero sommare i numeri a_i

di sopra, la somma $(a_1 + a_2 + ... + a_{50})$ si può scrivere in modo abbreviato

$$\sum_{k=1}^{50} a_k$$

scrittura che si legge "somme con k che va da 1 a 50 di a_k".

1.10 Nozioni di calcolo combinatorio

Denoteremo con card(A) la cardinalità di un insieme A. Ricordiamo che se card$(A) = p$, card$(B) = q$, allora card$(A \times B) = pq$. Vogliamo in un certo senso generalizzare questa formula. Consideriamo il modello di un'urna U che contiene n palline $\{a_1, a_2, .., a_n\}$ distinguibili. Si fanno successivamente k estrazioni (di una pallina). Il risultato viene considerato come una k-pla ordinata $\{a_{i_1}, a_{i_2}, .., a_{i_k}\}$ dove a_{i_s} indica la pallina estratta nella s-ma estrazione ($i_s \in \{1, 2, .., n\}$). Le estrazioni si possono fare con due modalità diverse: con rimpiazzamento, senza rimpiazzamento (si noti che nel secondo caso dovrà essere $k \leq n$). Si chiede quanti sono i risultati possibili. Nel primo caso si hanno tanti possibili risultati quanto la cardinalità del prodotto cartesiano di k copie di U, cioè n^k. Nel secondo caso ogni volta l'urna ha una pallina in meno e quindi il risultato sarà $n(n-1)...(n-k+1) = D_{n,k}$ (sono k fattori calanti di uno a partire da n); questo numero conta le **disposizioni** di n oggetti k a k. Il numero $D_{n,n}$ conta tutte le **permutazioni** possibili di n oggetti e si indica con $n!$ (n fattoriale). Dunque $n! = n(n-1)..3.2.1$, per definizione si pone $0! = 1$. Consideriamo ora il numero $C_{n,k}$ (**combinazioni**) dei sottoinsiemi distinti di cardinalità k di un insieme di cardinalità n. E' facile vedere che $D_{n,k} = k!C_{n,k}$ e quindi

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)..(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

Ricordiamo qui la formula per le potenze di un binomio (**binomio di Newton**):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

2 Gli insiemi numerici Q e R

2.1 I numeri razionali

L'insieme dei numeri razionali Q è l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza delle frazioni. Richiamiamo le principali proprietà: Q è un gruppo commutativo rispetto alla somma, $Q \setminus \{0\}$ è un gruppo commutativo rispetto al prodotto, vale la proprietà distributiva. Si vede facilmente che Q è totalmente ordinato dalla usuale relazione $\leq$ di minore o uguale. Q è **denso**, questo significa che per ogni coppia a, b con $a \leq b, a \neq b$ (naturalmente scriveremo più semplicemente $a < b$) esiste un c tale che $a < c < b$. (Si prenda per esempio $c = (a+b)/2$).

2.2 I numeri reali

Diamo qui un cenno su come si possa definire R come "ampliamento" di Q. Premettiamo delle definizioni riguardanti insiemi totalmente ordinati (che applichiamo a Q e poi a R). Sia A un sottoinsieme non vuoto di Q, un elemento $M \in Q$ è un **maggiorante** per A se $a \leq M$ per ogni $a \in A$; se esistono maggioranti per A si dice che A è **superiormente limitato**. Un insieme superiormente limitato può avere (ma può anche non avere) un **massimo**, cioè un elemento α appartenente ad A tale che $\alpha \geq a$ per ogni $a \in A$. In modo analogo si danno le definizioni di **minorante**, di insieme **inferiormente limitato** e di **minimo**. Se A è nello stesso tempo inferiormente limitato e superiormente limitato si dirà che A è **limitato**.

Definizione. Una coppia (A, B) di sottoinsiemi di Q si dice che è una **sezione** in Q se: A, B sono non vuoti, $A \cup B = Q$ e $A \cap B = \emptyset$ (questo significa che A, B definiscono una partizione non banale di Q) e inoltre $a \in A, b \in B \Rightarrow a < b$.

Si noti che se A ha massimo allora B non può avere minimo, se B ha minimo allora A non può avere massimo (questo segue dal fatto che Q è denso). Per avere le sezioni di questo tipo, dette sezioni di Dedekind, basta fissare un $q \in Q$ e definire $A = \{x \in Q : x \leq q\}$, $B = A^c$ oppure $A = \{x \in Q : x < q\}$, $B = A^c$, in effetti possiamo identificare queste due sezioni oppure chiamare sezioni di Dedekind solo quelle in cui l'insieme a sinistra ammette massimo. Le sezioni di Dedekind (con la convenzione di sopra) sono chiaramente in corrispondenza biunivoca con gli elementi di Q. A prima vista può sembrare sorprendente il fatto che esistano in Q sezioni (A, B) che non sono di Dedekind, tali sono le sezioni per cui non esiste il massimo di A e non esiste il minimo di B: queste sezioni si chiamano **lacune**. E' una lacuna in Q la sezione (A, B) dove $A = \{x \in Q : x \leq 0\} \cup \{x \in Q : x > 0 \, \text{e} \, x^2 < 2\}$, $B = A^c$. L'insieme R dei numeri reali è l'insieme di tutte le sezioni in Q: l'insieme delle sezioni di Dedekind corrisponde all'insieme dei numeri razionali (può essere identificato con Q), le lacune sono dette numeri irrazionali. E' possibile estendere in modo coerente a tutto R le operazioni e la relazione di ordine in Q.

Notiamo qui che una funzione reale $f : A \to R$ si dice **limitata** se $f(A)$ è un sottoinsieme limitato di R.

2.3 Completezza di R

R gode di tutte le proprietà di Q con in più la fondamentale proprietà di **completezza** che ora descriveremo. Sia A un sottoinsieme non vuoto di R, se A non è superiormente limitato diremo che l'**estremo superiore** di A è $+\infty$ ($\sup A = +\infty$); in caso contrario esistono maggioranti per A.

Teorema (completezza di R)

Se A è un sottoinsieme non vuoto di R superiormente limitato allora esiste (ed è unico) il minimo fra i maggioranti di A che è detto **estremo superiore** di A ($\sup A$).

Vediamo ora come caratterizzare il $\sup A$ (quando A è superiormente limitato). Poniamo $\alpha = \sup A$; poiché α è un maggiorante avremo $a \in A \Rightarrow a \leq \alpha$; poiché α è il minimo maggiorante ogni numero β con $\beta < \alpha$ non può essere un maggiorante per A (porremo $\beta = \alpha - \epsilon$ con $\epsilon > 0$) vale a dire $\exists \, a_\epsilon \in A$ tale che $\alpha - \epsilon < a_\epsilon \, (\leq \alpha)$.

Riassumendo avremo che $\alpha = \sup A$ se e solo se

i) $a \leq \alpha \; \forall a \in A$

ii) $\forall \epsilon > 0 \, \exists \, a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a \, (\leq \alpha)$.

Se accade che $\alpha = \sup A \in A$ (cosa che avviene solo in casi particolari) α risulta essere il massimo di A, scriveremo $\alpha = \max A$. Avremo in modo del tutto parallelo:

Sia A un sottoinsieme non vuoto di R, se A non è inferiormente limitato diremo che l'estremo inferiore di A è $-\infty$ e scriveremo $\inf A = -\infty$; in caso contrario esistono minoranti per A.

Teorema (completezza di R)

Se A è un sottoinsieme non vuoto di R inferiormente limitato allora esiste (ed è unico) il massimo fra i minoranti di A che è detto **estremo inferiore** di A ($\inf A$).

3 Successioni

3.1 Limite di successioni

Le funzioni reali definite su N sono chiamate successioni (reali). Per le successioni si usano di solito delle notazioni speciali: la successione $a : N \to R$ si indica con $\{a_n\}_{n \in N}$ o anche più semplicemente con $\{a_n\}$ (dove a_n sta per $a(n)$) o con $\{a_1, a_2, .., a_n, ..\}$. Si dice anche che a_n è il termine generale della successione. Introduciamo ora il concetto di **limite**: si dice che $\alpha \in R$ è limite di una successione $\{a_n\}$ e si scrive $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ se

$$(*) \qquad \forall \epsilon > 0 \ \exists \, \nu(\epsilon) \in N : n > \nu(\epsilon) \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$$

Si dice che una successione $\{a_n\}$ è **convergente** se esiste un numero reale α tale che la $(*)$ sia soddisfatta. Chiamiamo intorno di centro $c \in R$ e raggio $\delta > 0$ l'intervallo aperto $(c-\delta, c+\delta)$ ovvero l'insieme $I(c, \delta) = \{x \in R : c-\delta < x < c + \delta\}$. Si ha subito che una successione convergente è limitata: infatti tutti gli elementi a_n esclusi al più un numero finito di essi appartengono all'intorno $I(\alpha, r)$ dove r è un qualunque fissato numero positivo e α il limite della successione. Si noti però che non tutte le successioni limitate sono convergenti. Si dice che una successione $\{a_n\}$ è **divergente** a $+\infty$ $(-\infty)$ se

$$(**) \qquad \forall k > 0 \ \exists \, \nu(k) \in N : n > \nu(k) \Rightarrow a_n > k \ (a_n < -k)$$

Chiaramente una successione $\{a_n\}$ divergente, per es. a $+\infty$, non può essere superiormente limitata: infatti tutti gli elementi a_n esclusi al più un numero finito sono maggiori di un qualunque fissato numero h positivo. Una successione di questi tre tipi (convergente, divergente a $+\infty$, divergente a $-\infty$) è detta **regolare**, ogni altra successione è detta non regolare. Il limite di una successione convergente è **unico**. Supponiamo che $\lim_{n \to \infty} a_n = \beta = \gamma$, si ha successivamente $|\beta - \gamma| = |(\beta - a_n) + (a_n - \gamma)| \le |\beta - a_n| + |a_n - \gamma|$; poiché le ultime due quantità si possono rendere piccole a piacere, segue subito che $\beta = \gamma$.

3.2 Primi risultati

Sia P una proprietà che può valere o non valere per gli elementi di una successione $\{a_n\}$ (per es. l'essere positivi, essere costanti), se esiste ν tale che per $n > \nu$ gli elementi a_n soddisfano P, si dice che P vale **definitivamente**. Da quanto abbiamo visto segue che se una successione converge ad un numero α allora definitivamente i suoi elementi stanno in ogni intorno $I(\alpha, \delta)$ con $\delta > 0$, se diverge a $+\infty$ allora definitivamente i suoi elementi sono maggiori di ogni numero k.

Definizione: sign : $R \to R$ (segno) è la funzione così definita: $\text{sign}(x) = 1\ (-1)$ se $x > 0\ (< 0)$, $\ \text{sign}(0) = 0$.

Teorema (permanenza del segno)

i) se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, allora definitivamente a_n ha il segno di a ($\text{sign}(a_n) = \text{sign}(a)$)

ii) se definitivamente $a_n \geq 0\ (\leq 0)$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, allora $a \geq 0\ (\leq 0)$.

Una successione $\{a_n\}$ si dice **crescente** se $p < q \Rightarrow a_p \leq a_q$, se poi $a_p < a_q$ si dirà strettamente crescente; $\{a_n\}$ si dice **decrescente** se $p < q \Rightarrow a_p \geq a_q$, se poi $a_p > a_q$ si dirà strettamente decrescente. Tali successioni si dicono tutte **monotone**.

Teorema

Ogni successione (definitivamente) monotona è regolare.

Dimostrazione

Basterà considerare il caso che la successione $\{a_n\}$ sia (definitivamente) crescente. Sono possibili due casi: $\sup\{a_n\} = \alpha \in R$, oppure $\sup\{a_n\} = +\infty$. Nel primo caso fissato $\epsilon > 0$ per definizione di sup esiste $n(\epsilon) \in N$ tale che $\alpha - \epsilon < a_{n(\epsilon)}\ (\leq \alpha)$, se poi $n > n(\epsilon)$ si avrà $a_n \geq a_{n(\epsilon)}$ perché la successione è crescente. Dunque abbiamo che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n(\epsilon) \in N$ tale che $n > n(\epsilon)$ implica $\alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon$ e ciò prova che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Nel secondo caso fissato $k > 0$, poiché la successione non è limitata superiormente, esiste $n(k) \in N$ tale che $a_{n(k)} > k$, se poi $n > n(k)$ si avrà $a_n \geq a_{n(k)}$ perché la successione è crescente. Dunque abbiamo che per ogni $k > 0$ esiste $n(k) \in N$ tale che $n > n(k)$ implica $a_n > k$ e ciò prova che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

3.3 Operazioni sulle successioni

Date due successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ la successione somma $\{a_n + b_n\}$ e quella prodotto $\{a_n b_n\}$ sono definite nel modo ovvio, così come si può fare anche per altre operazioni. Per semplicità scriveremo $a_n \to \alpha$ al posto di $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

Supponiamo che $a_n \to \alpha, b_n \to \beta$, non è difficile provare i seguenti risultati: $(a_n + b_n) \to (\alpha + \beta)$; $(a_n b_n) \to (\alpha\beta)$; se $\beta \neq 0$ si ha anche $a_n/b_n \to \alpha/\beta$.
Criterio del confronto (dei carabinieri): date tre successioni $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ supponiamo che (definitivamente) $a_n \leq b_n \leq c_n$ e che $a_n \to k, c_n \to k$; allora si ha anche $b_n \to k$. Altro confronto: date due successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ supponiamo che (definitivamente) $a_n \geq b_n$ e che $b_n \to +\infty$; allora si ha anche $a_n \to +\infty$.
In alcuni casi si possono fare operazioni anche con successioni divergenti o non regolari. Elenchiamo qualche risultato tralasciandone altri analoghi, sono tutti di facile verifica
i) $a_n \to a \neq 0$, $b_n \to 0$, e b_n definitivamente positivi (negativi), allora $a_n/b_n \to \text{sign}(a)\infty$ $(-\text{sign}(a)\infty)$
ii) Se $\{a_n\}$ è limitata e $b_n \to 0$, allora $a_n b_n \to 0$
iii) Se $\{a_n\}$ è limitata e $b_n \to +\infty$, allora $a_n/b_n \to 0$
iv) Se $\{a_n\}$ è limitata e $b_n \to +\infty$, allora $a_n + b_n \to +\infty$.
v) $a_n \to a \neq 0, b_n \to +\infty$, allora $a_n b_n \to \text{sign}(a)\infty$.

3.4 Forme indeterminate

Si dice che i simboli $+\infty - (+\infty)$, $0\,\infty$, $0/0$, $(\infty)/(\infty)$ denotano **forme indeterminate**: questa è una scrittura abbreviata e indica che abbiamo due successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ che rispettivamente hanno il comportamento indicato. La forma è indeterminata perché senza ulteriori ipotesi non è possibile determinare il comportamento della successione differenza (primo caso), prodotto (secondo caso) etc. Due successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ possono dar luogo anche a forme indeterminate di tipo esponenziale: 0^0, ∞^0, 1^∞. Seguono alcuni esempi (il primo dei quali è di importanza fondamentale).
i) **Il numero e**
Sia $a_n = 1 + 1/n$, $b_n = n$ allora $a_n^{b_n}$ dà luogo alla forma indeterminata 1^∞. Posto $e_n = (1 + 1/n)^n$ si dimostra che $\{e_n\}$ è una successione crescente e che $e_n < 3$; per il teorema sulle successioni monotone e_n converge, il suo limite si chiama e (da Eulero), si ha e = 2, 7182..
ii) Sia $a_n = n$, $b_n = 1/n$ allora $a_n^{b_n}$ dà luogo alla forma indeterminata ∞^0. Dimostriamo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Se si pone $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ chiaramente è $h_n > 0$. Dunque si ha usando il binomio di Newton $n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \binom{n}{2}h_n^2 + .. + h_n^n$, poiché tutti gli addendi sono positivi si avrà: $n > \binom{n}{2}h_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}h_n^2$; da questa si ottiene $1 < 1 + h_n = \sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ e quindi dal teorema di confronto segue la tesi perché $\sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0$.

iii) Il seguente risultato teorico permette di calcolare diverse forme indeterminate: sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi tale che $a_n/a_{n+1} \to \alpha$; allora se $\alpha > 1$ $a_n \to 0$, se $\alpha < 1$ $a_n \to +\infty$.

Dimostrazione: se vale il primo caso a_n è definitivamente decrescente e quindi (teorema sulle successioni monotone) converge, sia c il suo limite, poiché la successione è positiva sarà $c \geq 0$. Non può essere $c > 0$: se così fosse applicando la formula $\lim(a_n/a_{n+1}) = (\lim a_n)/(\lim a_{n+1})$ si otterrebbe $\alpha = 1/1 = 1$ contro l'ipotesi $\alpha >1$. Se vale il secondo caso a_n è definitivamente crescente e quindi (teorema sulle successioni monotone) o converge a un numero positivo c o diverge a $+\infty$. Non può essere $a_n \to c$ perché se così fosse applicando la formula $\lim(a_n/a_{n+1}) = (\lim a_n)/(\lim a_{n+1})$ si otterrebbe $\alpha = 1/1 = 1$ contro l'ipotesi $\alpha <1$.

Esempio 1 (l'esponenziale "uccide" qualsiasi potenza): sia $b > 1$ e s un numero positivo qualsiasi, mostriamo che $n^s/b^n \to 0$. Infatti se $a_n = n^s/b^n$ si ha $a_n/a_{n+1} = b(\frac{n}{n+1})^s \to b > 1$.

Esempio 2: sia $a_n = \frac{x^n}{n!}$ con $x > 0$, proviamo che $a_n \to 0$. Si ha $a_n/a_{n+1} = (n+1)/x \to +\infty$; da qui segue la tesi (il teorema usato è applicabile anche quando $\alpha = +\infty$).

3.5 Criterio di Cauchy

Enunciamo ora un criterio di convergenza per una successione $\{a_n\}$ che non richiede la conoscenza a priori del limite. Premettiamo la seguente definizione: si dice che una successione $\{a_n\}$ è di Cauchy se soddisfa la seguente proprietà

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \, \nu(\epsilon) \in N : p, q > \nu(\epsilon) \Rightarrow |a_p - a_q| < \epsilon$$

Teorema: Una successione $\{a_n\}$ è convergente se e solo se è di Cauchy.

Il fatto che in R le successioni di Cauchy siano convergenti è una proprietà equivalente alla completezza; questa proprietà non vale in Q.

Diamo ora il concetto di **sottosuccessione** di una successione data. Sia $\{a_n\}$ una successione in R e $\{n_1, n_2, .., n_k, ..\}$ una successione strettamente crescente di interi positivi: la successione $\{a_{n_1}, a_{n_2}, .., a_{n_k}, ..\}$ è una sottosuccessione della successione $\{a_n\}$. Si noti che per la sottosuccessione l'indice di successione che abbiamo usato è k mentre per la successione di partenza è n; si noti poi che i valori della sottosuccessione sono alcuni (in generale non tutti) dei valori assunti dalla successione di partenza (da qui il nome). Si potrebbe dimostrare il seguente

Teorema: da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente.

4 Limiti e continuità di funzioni reali di variabile reale

4.1 Limiti

Consideriamo funzioni $f : I \to R$ dove I è un intervallo (anche illimitato) di R. Sia $a \in I$, diamo subito qualche definizione di limite:

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \text{ sta per } \forall\epsilon > 0\,\exists\,\delta(\epsilon) > 0 : 0 < |x-a| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x)-c| < \epsilon$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \text{ sta per } \forall k > 0\,\exists\,\delta(k) > 0 : 0 < |x-a| < \delta(k) \Rightarrow f(x) > k$$

Si considera anche il limite di una funzione in un punto fuori dal suo dominio, bisognerà però che ci siano punti del dominio vicini quanto si vuole a questo punto. Ci occorre la seguente
Definizione: Sia $A \subset R, x \in R$, si dice che x è un **punto di accumulazione** per A se ogni intorno di x contiene infiniti punti di A.
Si osservi che le due definizioni di sopra si applicano anche per un punto a fuori dall'intervallo I ma di accumulazione per I. Le seguenti sono le definizioni di limite parallele a quelle già date per le successioni (si suppone qui che I contenga una semiretta destra)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = c \text{ sta per } \forall\epsilon > 0\,\exists\,x(\epsilon) > 0 : x > x(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ sta per } \forall h > 0\,\exists\,x(h) > 0 : x > x(h) \Rightarrow f(x) > h$$

Si descrivono facilmente altri casi simili di limiti e anche si definiscono limiti destri e sinistri. Per esempio così è definito un limite sinistro

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = c \text{ sta per } \forall\epsilon > 0\,,\exists\,\delta(\epsilon) > 0 : a-\delta(\epsilon) < x < a \Rightarrow |f(x)-c| < \epsilon$$

Le operazioni sui limiti procedono come per le successioni, così come la discussione delle forme indeterminate.

4.2 Limiti notevoli

Ecco alcuni limiti notevoli: dal (prevedibile) risultato $\lim_{x\to+\infty}(1 + 1/x)^x = \mathrm{e}$ prendendo il logaritmo e cambiando $1/x$ con t si deduce che

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$$

Dei seguenti due limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n$$

il primo si può verificare con semplici considerazioni geometriche; il secondo usando il binomio di Newton.

4.3 Funzioni monotone

Una funzione $f : I \to R$ (dove I è un intervallo) si dice **crescente** (**decrescente**) se $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ $(f(x) \geq f(y))$ se poi $f(x) < f(y)$ $(f(x) > f(y))$ si dirà strettamente crescente (strettamente decrescente). Tutti questi tipi di funzioni si dicono monotone. Le funzioni monotone hanno proprietà di regolarità analoghe a quelle delle successioni monotone. Per esempio vale il seguente

Teorema: sia $f : (a, b) \to R$ crescente e sia $c \in (a, b)$, allora esiste

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in (a, c)\}.$$

4.4 Continuità

Sia $f : I \to R$ e $a \in I$, diremo che la funzione f è **continua** nel punto a se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ cioè se

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\,\delta(\epsilon) > 0 : |x - a| < \delta(\epsilon) \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Si dirà poi che f è continua in un insieme I se è continua in tutti i punti di I. Da quanto sappiamo segue facilmente che somma prodotto e quoziente (quando possibile) di funzioni continue sono continui. Per verificare la continuità di una funzione in un punto si possono usare le successioni.

Teorema: una funzione f è continua in un punto del dominio a se e solo se per ogni successione $\{a_n\}$ convergente ad a si ha che $\{f(a_n)\}$ converge a $f(a)$.

Teorema: la composizione di funzioni continue è continua.

Questo risultato fondamentale si può provare usando il teorema precedente.

Teorema: una funzione invertibile continua ha inversa continua.

Per es. sono continue le seguenti funzioni: $\mathbf{arctan}\, x$ (inversa della restrizione di $\tan x$ all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2))$, **arcsin** x (inversa della restrizione di $\sin x$ all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$). Pertanto si ha:

$$\mathbf{arctan} : (-\infty, +\infty) \to (-\pi/2, \pi/2)\,,$$

$$\mathbf{arcsin} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]\,.$$

Non è difficile verificare che le usuali funzioni elementari sono continue; per esempio sono funzioni continue i polinomi, $|x|, \sin x, \cos x, \mathrm{e}^x, \log x, \sqrt{x},$ da queste operando con le operazioni e la composizione si ottiene un gran numero di funzioni continue.

4.5 Proprietà delle funzioni continue su un intervallo chiuso

Sia $f : A \to R$ una funzione reale:
Definizione Un punto $a \in A$ è un punto di **massimo** (assoluto) per la f se $x \in A \Rightarrow f(x) \leq f(a)$; è un punto di **minimo** (assoluto) per la f se $x \in A \Rightarrow f(x) \geq f(a)$.
In generale una funzione qualsiasi non risulterà limitata e quindi a maggior ragione non ammetterà estremi assoluti. Anche per una funzione continua senza ipotesi sul dominio non si può affermare nulla sull'esistenza di estremi assoluti. Valgono i seguenti (importanti) teoremi
Teorema (Weierstrass): sia $f : [a, b] \to R$ una funzione continua, allora f (è limitata) e ammette estremi assoluti (almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo).
Teorema (degli zeri): sia $f : [a, b] \to R$ una funzione continua e sia $f(a)f(b) < 0$, allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.
Quest'ultimo teorema ammette una formulazione equivalente
Teorema (dei valori intermedi): siano h, m con $h < m$ due valori assunti dalla funzione continua in $[a, b]$ cioè per es. $f(\alpha) = h$ e $f(\beta) = m$ con $\alpha, \beta \in [a, b], \alpha < \beta$, allora se $h < q < m$ esiste almeno un punto $c \in (\alpha, \beta)$ tale che $f(c) = q$.